

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Với $m = 1$ thì $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{67}{27}$.
- b) Với $m = 1$ thì $\min_{[1;3]} f(x) = -7$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 8$.
- d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 12$.

Lời giải.

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1;3] \\ x = -\frac{2}{3} \notin [1;3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = -5 + m \\ f(2) = -8 + m \\ f(3) = -3 + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{[1;3]} f(x) = m - 3 \\ \min_{[1;3]} f(x) = m - 8 \end{cases}$$

$$+ m = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max_{[1;3]} f(x) = -2 \\ \min_{[1;3]} f(x) = -7 \end{cases}$$

$$+ \max_{[1;3]} f(x) = m - 3 = 5 \Rightarrow m = 8.$$

$$+ \min_{[1;3]} f(x) = m - 8 = 5 \Rightarrow m = 13$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Với $m = 1$ thì $\min_{[2;4]} y = \frac{5}{3}$

b) Với $m = 1$ thì $\max_{[2;4]} y = 4$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = \frac{4}{3}$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = 11$.

Lời giải.

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$+ m = 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{5}{3} \\ \max_{[2;4]} f(x) = f(2) = 3 \end{cases}$$

$$+ \text{Đạo hàm } f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2}.$$

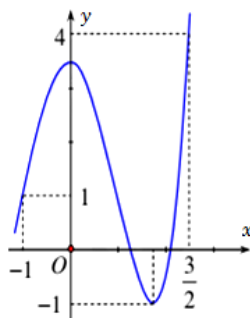
TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} < 0$; $\forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi

$$\text{khoảng xác định. Khi đó } \Rightarrow \begin{cases} \min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{m+4}{3} = 5 \Leftrightarrow m = 11(N) \\ \max_{[2;4]} f(x) = f(2) = m+2 = 5 \Leftrightarrow m = 3(N) \end{cases}.$$

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} > 0$; $\forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi

$$\text{khoảng xác định. Khi đó } \Rightarrow \begin{cases} \max_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{m+4}{3} = 5 \Leftrightarrow m = 11 \\ \min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m+2 = 5 \Leftrightarrow m = 3 \end{cases} \text{ (loại).}$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



a) $\min_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} y = 0$.

b) $\text{Max}_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} y = 4.$

c) Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$ là 5.

d) Số giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f(x) \leq m + 7$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$ là 4.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai.

b) Đúng.

c) Sai. Vì để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow -1 \leq m < 4$. Suy ra có 4 giá trị nguyên là $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

d) Sai.

Vì để bất phương trình $f(x) \leq m + 7$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \text{Max}_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} y = 4 \leq m + 7 \Leftrightarrow m \geq -3 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		-	+
y	$-\infty$	↗0	↘-1	↗ $+\infty$

a) Hàm số có đúng một cực trị.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

c) Trên $[0; 1]$ hàm số đạt nhỏ nhất là -1 tại $x = 1$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

b) sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

b) đúng vì trên $[0; 1]$ hàm số đạt nhỏ nhất là -1 tại $x = 1$.

d) đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$.

a) $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

b) $\min_{[2;4]} y = 3 \Rightarrow m = 5$.

d) $\max_{[2;4]} y = 3 \Rightarrow m = 5$.

d) $\min_{[2;4]} y + \max_{[2;4]} y = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) đúng vì $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

b) đúng vì: $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5.$$

c) sai vì: $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\max_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra.

$$\max_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (nhận)}.$$

d) sai vì ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $m < -1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[2; 4]$.

Khi đó: $\min_{[2;4]} y + \max_{[2;4]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(4) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{1} + \frac{4+m}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 1,5$ (loại).

Nếu $m > -1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[2;4]} y + \max_{[2;4]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(4) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{4+m}{3} + \frac{2+m}{1} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 1,5$ (nhận).

Câu 6: Xét tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

a) Tồn tại giá trị $m < -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Tồn tại giá trị $-2 < m < 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) Tồn tại giá trị $0 < m < 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

d) Tồn tại giá trị $m > 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) sai vì xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

Khi $m < -2 \Leftrightarrow 2 + m < 0$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

b) đúng vì xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

Khi $-2 < m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases}$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

c) đúng vì xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

Khi: $0 < m < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2 + m < 0 \end{cases}$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

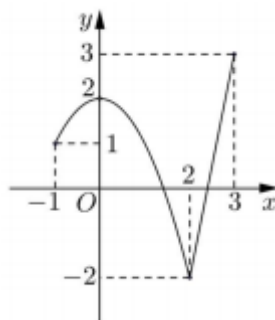
d) sai vì xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

Khi: $m > 2 \Leftrightarrow -2 + m > 0$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$ là 3.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 3]$ đạt được tại $x = -2$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; 3)$ là -2 .
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1; 3)$ là 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$ là 3 tại $x = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 3]$ là -2 đạt được tại $x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; 3)$ là -2 đạt được tại $x = 2$ và

giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ không tồn tại.

- a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là 3
 b) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là -2 đạt được tại $x = 2$.
 c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là -2
 d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ không tồn tại.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
y'			$- \quad 0 \quad +$	
y''		-8	-9	$+\infty$

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 .
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -9 .
 c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9 .
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là $+\infty$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 tại $x = -4$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 đạt được tại $x = -3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9 đạt được tại $x = -3$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ không tồn tại.

- a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 .
 b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -9 .
 c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9 .
 d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ không tồn tại.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Khi $m = 1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 1.
 b) Khi $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -3 .
 c) Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -1 thì $m = 3$.
 d) Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 2 thì $m = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

+ Với $m=1$ thì $y = x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (n)} \\ x = 0 \text{ (n)} \end{cases}$.

Ta có $y(0) = y(3) = 1$ và $y(2) = -3$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 1 tại $x = 0$ hoặc $x = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là -3 tại $x = 2$.

+ Ta có $y = x^3 - 3x^2 + m$ suy ra $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (n)} \\ x = 0 \text{ (n)} \end{cases}$.

Khi đó $y(0) = y(3) = m$ và $y(2) = -4 + m$.

Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là -1 thì $-4 + m = -1 \Leftrightarrow m = 3$.

Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 2 thì $m = 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 1]$ là -2 khi $m = -1$
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$ là -2 khi $m = 2$
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là 2 khi $m = 1$
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là 2 khi $m = 1$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

$$y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

a) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 1]$ là

$$y(1) = \frac{1 - m^2 + m}{2} = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ m = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$ là

$$y(0) = \frac{0 - m^2 + m}{1} = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

c) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là

$$y(-3) = \frac{-3 - m^2 + m}{-2} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

d) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là

$$y(-2) = \frac{-2 - m^2 + m}{-1} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2; 3]$ là 2 khi $m = 0$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 0]$ là -2 khi $m = 2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 2]$ là 2 khi $m = 0$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là -1 khi $m = 7$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

$$y' = \frac{-m^2 - 1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2; 3]$ là $y(2) = \frac{2+m^2}{1} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

b) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 0]$ là $y(0) = \frac{m^2}{-1} = -2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 2]$ là $y(2) = \frac{2+m^2}{1} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -2]$ là

$$y(-3) = \frac{-3+m^2}{-4} = -1 \Leftrightarrow m^2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$,

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[-1;1]} f(x)$ đạt được tại $x = 1$

b) Khi $m = 1$ thì $\min_{[1;3]} f(x) = -3$

c) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\min_{[-1;1]} f(x) = -6$

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\max_{[-1;1]} f(x) < 5$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[-1;1]} f(x)$ đạt được tại $x = 1$

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = -x^3 + x^2 - 3x \Rightarrow y' = -3x^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $[-1; 1]$ nên $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1)$

b) Khi $m = 1$ thì $\min_{[-1;1]} f(x) = -3$

Ta có: $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 = -3$

c) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\min_{[-1;1]} f(x) = -6$

Ta có: $y' = -3x^2 + 2mx - m^2 - m - 1; \forall x \in \mathbb{R}$

Mà $\Delta' = -2m^2 - 3m - 3 < 0; \forall m \in \mathbb{R}$

Suy ra $y' < 0; \forall x \in [-1;1]$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;1]$

Suy ra $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -6$.

Lại có $y(1) = -2 - m^2$.

Do đó $-2 - m^2 = -6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\max_{[-1;1]} f(x) < 5$

Ta có: $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = m^2 + 2m + 2$

Suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) < 5 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$

Do đó, có 3 giá trị nguyên của của tham số m thỏa mãn $\max_{[-1;1]} f(x) < 5$

Câu 13: Cho hàm số hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$

a) $\max_{[3;5]} f(x) = f(3)$

b) $\min_{[2;3]} f(x) = m^2 + m + 2$

c) $\max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

d) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $\max_{[2;3]} f(x) + \min_{[2;3]} f(x) = \frac{13}{2}$ bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) $\max_{[3;5]} f(x) = f(3)$

Ta có: $y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in [3;5] \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[3;5]$

Vậy $\max_{[3;5]} f(x) = f(3)$

b) $\min_{[2;3]} f(x) = m^2 + m + 2$

Ta có: $y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[2;3]$

Vậy $\min_{[2;3]} f(x) = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}$

c) $\max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Ta có: $\max_{[2;3]} f(x) = f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow m^2 + m + 2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow m^2 + m + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

d) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $\max_{[2;3]} f(x) + \min_{[2;3]} f(x) = \frac{13}{2}$ bằng 1.

Xét hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow \min_{[2;3]} f(x) = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}, \max_{[2;3]} f(x) = f(2) = \frac{m^2 + m + 2}{1}$

.

$\max_{[2;3]} f(x) + \min_{[2;3]} f(x) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + \frac{m^2 + m + 2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu là $S = -2 + 1 = -1$

Câu 14: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -2 .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3 .

c) Tập giá trị của hàm số là $[-3; +\infty)$.

d) Trên đoạn $[0;1]$, $\max y = f(x_A) = y_A$; $\min y = f(x_B) = y_B$. Độ dài $AB = \sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -2 .

Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$..

$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$..

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	-2	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3 .

Từ bảng biến thiên, giá trị của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3 .

c) Tập giá trị của hàm số là $[-3; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên, tập giá trị của hàm số là $[-3; +\infty)$.

d) Trên đoạn $[0; 1]$, $\max y = f(x_A) = y_A$; $\min y = f(x_B) = y_B$. Độ dài $AB = \sqrt{2}$.

Trên đoạn $[0; 1]$

$\max y = f(0) = -2$; $\min y = f(1) = -3$. Suy ra $A(0; -2)$, $B(1; -3)$

Khoảng cách $AB = \sqrt{2}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + m^2x - 2m^2 + 2m - 9$ với m là tham số.

a) Khi $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là -9 .

b) Khi $m = 1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3 .

c) Khi $m = 1$ thì tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1 .

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 3 . Số phần tử của S bằng 3 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Khi $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là -9 .

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[0; 3]$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$: $\min y = f(0) = -9$

b) Khi $m = 1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3 .

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[0; 3]$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$: $\max y = f(3) = 3$

c) Khi $m = 1$ thì tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1 .

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 \geq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 3. Số phần tử của S bằng 3.

$$y' = x^2 + m^2, x \in \mathbb{R}; y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3] \Rightarrow \max_{[0;3]} y = y(3) = m^2 + 2m$

Theo bài yêu cầu ta có $m^2 + 2m \leq 3 \Leftrightarrow m \in [-3; 1]$

Vì m nguyên nên có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x = -1$.

c) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M + m = 4\sqrt{2}$.

d) Bất phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - m \geq 0, \forall x \in [-1; 3]$ (m là tham số) khi $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Xét hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$

Tập xác định $D = [-1; 3]$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-1	1	3
y'	+	0	-
y	2	$2\sqrt{2}$	2

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Từ bảng biến thiên, suy ra $\min_{[-1;3]} y = 2$ khi $x = -1, x = 3$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x = 1$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[-1;3]} y = 2\sqrt{2}$ khi $x = 1$.

c) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M + m = 4\sqrt{2}$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $M + m = \max_{[-1;3]} y + \min_{[-1;3]} y = 2 + 2\sqrt{2}$.

d) Bất phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - m \geq 0, \forall x \in [-1;3]$ (m là tham số) khi $m \in (-\infty; 2]$.

Ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - m \geq 0, \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \geq m, \forall x \in [-1;3]$

$$\Leftrightarrow \min_{[-1;3]} (\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}) \geq m \quad (1)$$

Xét hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$

Tập xác định $D = [-1;3]$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-1	1	3
y'	+	0	-
y	2	$2\sqrt{2}$	2

Dựa vào bảng biến thiên, $(1) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = (x^2 - 3x + 1).e^x$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $5e^4$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $-e$.

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3;5]$ lần lượt là $e^3; 11e^5$.

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là $\frac{11}{e^2}; 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $5e^4$.

Ta có: $y' = (x^2 - x - 2).e^x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1; 4], \text{ hoặc } x = 2 \in [1; 4].$$

$$\text{Lại có: } y(1) = -e, \quad y(2) = -e^2, \quad y(4) = 5e^4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$ trên đoạn $[1; 4]$ là $5e^4$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 4]$ là $-e$.

$$\text{Ta có: } y' = (x^2 - x - 2).e^x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1; 4], \text{ hoặc } x = 2 \in [1; 4].$$

$$\text{Lại có: } y(1) = -e, \quad y(2) = -e^2, \quad y(4) = 5e^4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$ trên đoạn $[1; 4]$ là $-e^2$.

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3; 5]$ lần lượt là $e^3; 11e^5$.

$$\text{Ta có: } y' = (x^2 - x - 2).e^x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [3; 5], \text{ hoặc } x = 2 \notin [3; 5].$$

$$\text{Lại có: } y(3) = e^3, \quad y(5) = 11e^5.$$

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$ trên đoạn $[3; 5]$ lần lượt là $11e^5$ và e^3 .

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là $\frac{11}{e^2}; 1$.

$$\text{Ta có: } y' = (x^2 - x - 2).e^x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 0], \text{ hoặc } x = 2 \notin [-2; 0].$$

$$\text{Lại có: } y(-2) = 11e^{-2}, \quad y(-1) = 5e^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là $\frac{5}{e}$ và 1.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$.

a) Khi $m = 2$ thì $\max_{[0; 2]} f(x)$ đạt được tại $x = 0$.

b) Khi $m = 2$ thì $\min_{[0; 2]} f(x) = 1$.

c) Khi $m > 1$, nếu $\min_{[0; 2]} f(x) + \max_{[0; 2]} f(x) = 9$ thì $m = 3$.

d) Khi $m > 1$, nếu $2\min_{[0;2]} |f(x)| - 3\max_{[0;2]} |f(x)| = -20$ thì $m = 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Khi $m = 2$ thì $\max_{[0;2]} f(x)$ đạt được tại $x = 0$.

$$+ f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

+ Bảng biến thiên:

x	0 1 2		
$f'(x)$	0	-	0 +
$f(x)$	m	$m-1$	$m+4$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m = 2$ thì $\max_{[0;2]} f(x) = 6$ đạt được tại $x = 2$.

b) Khi $m = 2$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 1$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m = 2$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 1 = f(1)$.

c) Khi $m > 1$, nếu $\min_{[0;2]} f(x) + \max_{[0;2]} f(x) = 9$ thì $m = 3$.

Khi $m > 1$ thì: $\min_{[0;2]} f(x) = m-1$; $\max_{[0;2]} f(x) = m+4$.

Ta có: $\min_{[0;2]} f(x) + \max_{[0;2]} f(x) = 9 \Leftrightarrow m-1 + m+4 = 9 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Khi $m > 1$, nếu $2\min_{[0;2]} |f(x)| - 3\max_{[0;2]} |f(x)| = -20$ thì $m = 2$.

Khi $m > 1$ thì $m-1 > 0$, suy ra: $0 < m-1 < m < m+4$.

Suy ra: $\min_{[0;2]} |f(x)| = |m-1| = m-1$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = |m+4| = m+4$.

Ta có: $2\min_{[0;2]} |f(x)| - 3\max_{[0;2]} |f(x)| = -20 \Leftrightarrow 2(m-1) - 3(m+4) = -20 \Leftrightarrow m = 6$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + m + 5$.

a) Khi $m = 0$ thì $\min_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x = 1$.

b) Khi $m = 0$ thì $\max_{[-1;3]} f(x) = 8$.

c) Khi $m > 2$, nếu $\min_{[-1;3]} f(x) + \max_{[-1;3]} f(x) = 22$ thì $m = 7$.

d) Có 5 giá trị nguyên của $m \in (-20; -13)$ để $\min_{[-1;3]} |f(x)| + \max_{[-1;3]} |f(x)| > -6$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Khi $m = 0$ thì $\min_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x = 1$.

$$+ f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

+ Bảng biến thiên:

x	-1 1 3		
$f'(x)$	- 0 +		
$f(x)$	$m+13$	$m+1$	$m+8$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m = 0$ thì $\min_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x = 1$.

b) Khi $m = 0$ thì $\max_{[-1;3]} f(x) = 8$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m = 0$ thì $\max_{[-1;3]} f(x) = 13 = f(-1)$.

c) Khi $m > 2$, nếu $\min_{[-1;3]} f(x) + \max_{[-1;3]} f(x) = 22$ thì $m = 7$.

Khi $m > 2$ thì: $\min_{[-1;3]} f(x) = m+1$; $\max_{[-1;3]} f(x) = m+13$.

Ta có: $\min_{[-1;3]} f(x) + \max_{[-1;3]} f(x) = 22 \Leftrightarrow m+1 + m+13 = 22 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Có 5 giá trị nguyên của $m \in (-20; -13)$ để $\min_{[-1;3]} |f(x)| + \max_{[-1;3]} |f(x)| > -6$.

Khi $m \in (-20; -13)$ thì $m+13 < 0$, suy ra: $m+1 < m+8 < m+13 < 0$.

Suy ra: $\min_{[-1;3]} |f(x)| = |m+13| = -m-13$; $\max_{[-1;3]} |f(x)| = |m+1| = -m-1$.

Ta có:

$$\min_{[-1;3]} |f(x)| + \max_{[-1;3]} |f(x)| > -6 \Leftrightarrow -m-13 - m-1 > -6 \Leftrightarrow m < -4.$$

Ta có:

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -4) \\ m \in (-20; -13) \Rightarrow \begin{cases} m \in (-20; -13) \\ m \in \square \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in [-19; -14] \\ m \in \square \end{cases} \Rightarrow m \in \{-19; -18; -17; -16; -15; -14\}. \\ m \in \square \end{cases}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của $m \in (-20; -13)$ để $\min_{[-1;3]} |f(x)| + \max_{[-1;3]} |f(x)| > -6$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ với tham số m .

- Với $m = -3$ thì $\min_{[-1;1]} y = -8$ khi $x = -1$.
- Với $m = -3$ thì $\max_{[-1;1]} y = -3$ khi $x = 1$.
- Với mọi giá trị của m thì $\max_{[-1;1]} f(x) - \min_{[-1;1]} f(x) = 5$.
- $4\max_{[-1;1]} f(x) + 3\min_{[-1;1]} f(x) = -1$ khi $m = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

- Với $m = -3$ thì $\min_{[-1;1]} y = -8$ khi $x = -1$.

$$y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$$

$$\Rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) = -3; f(-1) = -8; f(1) = -4$$

$$\text{Nên } \min_{[-1;1]} y = -8 \text{ khi } x = -1.$$

- Với $m = -3$ thì $\max_{[-1;1]} y = -3$ khi $x = 1$.

$$\text{Nên } \min_{[-1;1]} y = -3 \text{ khi } x = 0.$$

- Với mọi giá trị của m thì $\max_{[-1;1]} f(x) - \min_{[-1;1]} f(x) = 5$.

$$y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$$

$$\Rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}$$

$$f(0) = m; f(-1) = m - 5; f(1) = m - 1.$$

$$\text{Nên } \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = m; \min_{[-1;1]} f(x) = m - 5 \text{ nên } \max_{[-1;1]} f(x) - \min_{[-1;1]} f(x) = 5$$

- $4\max_{[-1;1]} f(x) + 3\min_{[-1;1]} f(x) = -1$ khi $m = 2$.

Nên $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = m$; $\min_{[-1;1]} f(x) = m - 5$ nên

$$4\max_{[-1;1]} f(x) + 3\min_{[-1;1]} f(x) = 4m + 3(m - 5) = -1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = mx + 1 + \frac{4}{x-3}$ với tham số m .

a. Với $m = 1$ thì $\max_{[-1;1]} f(x) = 0$ khi $x = 1$.

b. Với $m = 1$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = -\frac{1}{3}$ khi $x = 0$.

c. Với $m < 0$ thì $\min_{[-2;0]} f(x) = -\frac{1}{3}$.

d. Với mọi $m < 0$ thì $\max_{[-2;0]} f(x) + \min_{[-2;0]} f(x) < 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a. Với $m = 1$ thì $\max_{[-1;1]} f(x) = 0$ khi $x = 1$.

$$\text{Với } m = 1 \Rightarrow y = f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-3} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = 5 \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$f(0) = -\frac{1}{3}; f(1) = 0; f(2) = -1.$$

Nên $\max_{[-1;1]} f(x) = 0$ khi $x = 1$.

b. Với $m = 1$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = -\frac{1}{3}$ khi $x = 0$.

$$f(0) = -\frac{1}{3}; f(1) = 0; f(2) = -1$$

Nên $\min_{[0;2]} f(x) = -1$ khi $x = 2$.

c. Với $m < 0$ thì $\min_{[-2;0]} f(x) = -\frac{1}{3}$.

$$y = f(x) = mx + 1 + \frac{4}{x-3}$$

$$y' = m - \frac{4}{(x-3)^2} < 0 \text{ với } m < 0 \text{ nên hàm số nghịch biến trên } [-2; 0]$$

$$-2 < 0 \Rightarrow f(-2) > f(0) \Rightarrow \min_{[-2;0]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{3}.$$

d. Với mọi $m < 0$ thì $\max_{[-2;0]} f(x) + \min_{[-2;0]} f(x) < 0$.

$$y' = m - \frac{4}{(x-3)^2} < 0 \text{ với } m < 0 \text{ nên hàm số nghịch biến trên } [-2; 0]$$

$$-2 < 0 \Rightarrow f(-2) > f(0) \Rightarrow \min_{[-2;0]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \max_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -2m + 1 + \frac{4}{-2-3} = -2m + \frac{1}{5}$$

$$\max_{[-2;0]} f(x) + \min_{[-2;0]} f(x) = -2m + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -2m - \frac{2}{15} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{15}.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a)** Với $m = 3$, giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;1]$ là 5.
b) Với $m = 1$, tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sin x)$ bằng 0
c) Có hai giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất $y = |f(x)|$ trên $[-1;3]$ bằng 8.
d) Khi $m = m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất, $m_0 \in (-1;4)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Ta có: $y' = f'(x) = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
$y = f(x)$	$-\infty$	$m+2$	$m-2$	$+\infty$	

- a.** Với $m = 3$, giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;1]$ là 5.

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\max_{[-2;1]} f(x) = f(-1) = m + 2$

Với $m = 3$, ta có $\max_{[-2;1]} f(x) = 3 + 2 = 5$. Vậy mệnh đề a) đúng.

- b.** Với $m = 1$, tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sin x)$ bằng 0

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$

$$\Rightarrow \max f(\sin x) = \max_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = m + 2$$

$$\Rightarrow \min f(\sin x) = \min_{[-1;1]} f(t) = f(1) = m - 2$$

Suy ra $\max f(\sin x) + \min f(\sin x) = 2m$

Với $m = 1$, ta có: $\max f(\sin x) + \min f(\sin x) = 2$. Vậy mệnh đề b) sai.

c. Có hai giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất $y = |f(x)|$ trên $[-1; 3]$ bằng 8.

Ta có: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|f(-1)|, |f(1)|, |f(3)|\} = \max \{|m-2|, |m+18|\}$

TH1: $|m-2| \leq |m+18| \Leftrightarrow m \geq -8$

Khi đó: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|m-2|, |m+18|\} = |m+18| = m+18$

Theo giả thiết, ta có: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = m+18 = 8 \Leftrightarrow m = -10$ (t/m)

TH2: $|m-2| \geq |m+18| \Leftrightarrow m \leq -8$

Khi đó: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|m-2|, |m+18|\} = |m-2| = 2-m$

Theo giả thiết: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = 8 \Leftrightarrow 2-m = 8 \Leftrightarrow m = -6$ (t/m)

Vậy có hai giá trị của tham số m để $\max_{[-1;3]} |f(x)| = 8$. Mệnh đề c) đúng.

d. Khi $m = m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-1; 3]$ đạt nhỏ nhất, $m_0 \in (-1; 4)$.

Ta có: $\max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|f(-1)|, |f(1)|, |f(3)|\} = \max \{|m-2|, |m+18|\}$

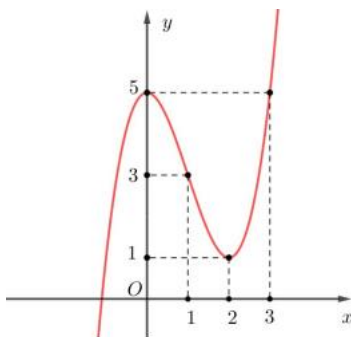
Khi đó: $\begin{cases} \max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|m-2|, |m+18|\} \geq |m-2| \\ \max_{[-1;3]} |f(x)| = \max \{|m-2|, |m+18|\} \geq |m+18| \end{cases}$

$2, \max_{[-1;3]} |f(x)| \geq |m-2| + |m+18| \geq |2-m+m+18| = 20$ hay $\max_{[-1;3]} |f(x)| \geq 10$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2-m = m+18 \Leftrightarrow m = -8$

Vậy với $m = -8$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-1; 3]$ đạt nhỏ nhất. Mệnh đề d) sai.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\square$, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



a) $\min_{[1;3]} f(x) = f(1)$.

b) $2 \min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$.

c) Đặt $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x}$, $\min_{[0;4]} g(x) > 0$.

d) Đặt $h(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m^2 + 3 \cdot \max_{[0;1]} h(x) + 4 \cdot \min_{[0;1]} h(x) - 3m$ bằng -62 .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a. $\min_{[1;3]} f(x) = f(1)$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = 1$. Vậy mệnh đề a) sai.

b. $2 \min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 1$, $\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = f(3) = 5$

Suy ra: $2 \min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$. Vậy mệnh đề b) đúng.

c. Đặt $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x}$, $\min_{[0;4]} g(x) > 0$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy: $f(x) \geq 1, \forall x \in [0;4]$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. (1)

Đặt $u = \sqrt{2x} + \sqrt{8-2x}$, $x \in [0;4]$

$$\Rightarrow u^2 = (\sqrt{2x} + \sqrt{8-2x})^2 \leq 2(2x + 8 - 2x) = 16 \Rightarrow 0 < u \leq 4, \forall x \in [0;4]$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Hay $\sqrt{2x} + \sqrt{8-2x} \leq 4, \forall x \in [0;4]$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x} \geq 1 - 4 = -3, \forall x \in [0;4]$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$

Vậy $\min_{[0;4]} g(x) = -3$. Mệnh đề c) sai.

d) Đặt $h(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m^2 + 3 \cdot \max_{[0;1]} h(x) + 4 \cdot \min_{[0;1]} h(x) - 3m$ bằng -62 .

Đặt $t = x^3 - x^2 + x + 2, x \in [0;1]$

Ta có: $t' = 3x^2 - 2x + 1 > 0 \forall x \in [0;1]$

$\Rightarrow$ Hàm số $t = x^3 - x^2 + x + 2$ đồng biến trên $[0;1] \Rightarrow t \in [2;3]$

Khi đó: $\min_{[0;1]} h(x) = f(2) + 3m = 1 + 3m$

$$\max_{[0;1]} h(x) = f(3) + 3m = 5 + 3m$$

Suy

ra:

$$S = m^2 + 3 \cdot \max_{[0;1]} h(x) + 4 \cdot \min_{[0;1]} h(x) - 3m = m^2 + 3 \cdot (5 + 3m) + 4 \cdot (1 + 3m) - 3m = m^2 + 18m + 19$$

$$\Rightarrow S = (m + 9)^2 - 62 \geq -62, \forall m \in \mathbb{R}. \text{ Vậy mệnh đề d) đúng.}$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4mx + m^2 + 2024$ với m là tham số.

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[1;3]} f(x)$ đạt được tại $x = 2$.

b) Khi $m = -1$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 2025$.

c) Với m là số nguyên dương, đặt $T = \min_{[-2;1]} f(x) + \max_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12; 2024)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[1;3]} f(x)$ đạt được tại $x = 2$.

$$\text{Khi } m = 1 \text{ thì } y = f(x) = x^2 - 4x + 2025.$$

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 2025$ xác định và liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - 4 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Khi đó: } f(1) = 2022; f(2) = 2021; f(3) = 2022.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = f(3) = 2022.$$

Hay hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1; x = 3$.

b) Khi $m = -1$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 2025$.

$$\text{Khi } m = -1 \text{ thì } y = f(x) = x^2 + 4x + 2025.$$

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 + 4x + 2025$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x + 4 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$\text{Khi đó: } f(0) = 2025; f(2) = 2037.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0;2]} f(x) = 2025.$$

c) Với m là số nguyên dương, đặt $T = \min_{[-2;1]} f(x) + \max_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051.

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4mx + m^2 + 2024$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - 4m \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4m = 0 \Leftrightarrow x = 2m \geq 2 \text{ (vì } m \text{ là số nguyên dương).}$$

$$\text{Khi đó: } f(-2) = m^2 + 8m + 2028; f(1) = m^2 - 4m + 2025.$$

$$\text{Suy ra } T = \min_{[-2;1]} f(x) + \max_{[-2;1]} f(x) = m^2 + 8m + 2028 + m^2 - 4m + 2025 = 2m^2 + 4m + 4053$$

Hay $T \geq 4059, \forall m \in \mathbb{Q}^+$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4059.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12; 2024)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036.

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4mx + m^2 + 2024$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 4m$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4m = 0 \Leftrightarrow x = 2m$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$2m$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$f(2m)$	$+\infty$

Để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12; 2024)$ thì

$$12 < 2m < 2024 \Leftrightarrow 6 < m < 1012.$$

Mà $m \in \mathbb{Q} \Rightarrow m \in \{7; 8; 9; \dots; 1011\}$.

$$\text{Tổng tất cả các giá trị của } m \text{ là } 7 + 8 + 9 + \dots + 1011 = \frac{(7+1011) \cdot 1005}{2} = 511545.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6mx^2 + m^2 + 2025$ với m là tham số.

a) Khi $m = 2$ thì $\max_{[-3;1]} f(x)$ đạt được tại $x = 0$.

b) Khi $m = -1$ thì $\min_{[-4;2]} f(x) = 2058$.

c) Với m là số nguyên âm, đặt $T = \min_{[-3;-1]} f(x) + \max_{[-3;-1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4084.

d) Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24; -2)$. Biết $S = (a; b)$, với $a, b \in \mathbb{Q}; a < b$. Giá trị của biểu thức $T = 2024b - 2025a = 11138$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Khi $m = 2$ thì $\max_{[-3;1]} f(x)$ đạt được tại $x = 0$.

$$\text{Khi } m = 2 \text{ thì } y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 2029.$$

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 2029$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 1]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 - 24x \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } f(-3) = 1894; f(1) = 2018; f(0) = 2029.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-3;1]} f(x) = f(0) = 2029.$$

Hay hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 1]$ tại $x = 0$.

b) Khi $m = -1$ thì $\min_{[-4;2]} f(x) = 2058$.

Khi $m = -1$ thì $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 2026$.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 2026$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; 2]$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 12x$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$.

Khi đó: $f(-4) = 2058; f(2) = 2058; f(0) = 2026$.

Suy ra $\min_{[-4;2]} f(x) = f(0) = 2026$.

c) Với m là số nguyên âm, đặt $T = \min_{[-3;-1]} f(x) + \max_{[-3;-1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4084.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 6mx^2 + m^2 + 2025$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; -1]$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12mx$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4m \leq -4 \end{cases}$ (vì $m \in \mathbb{Z}^-$).

Khi đó: $f(-3) = m^2 - 54m + 1998; f(-1) = m^2 - 6m + 2024$.

Suy ra $T = \min_{[-3;-1]} f(x) + \max_{[-3;-1]} f(x) = m^2 - 54m + 1998 + m^2 - 6m + 2024 = 2m^2 - 60m + 4022$

Hay $T \geq 4084, \forall m \in \mathbb{Z}^-$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4084.

d) Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24; -2)$. Biết $S = (a; b)$, với $a, b \in \mathbb{Z}; a < b$. Giá trị của biểu thức $T = 2024b - 2025a = 11138$.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 6mx^2 + m^2 + 2025$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12mx$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4m \end{cases}$.

Trường hợp 1: $m = 0$. Khi đó $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24; -2)$.

Trường hợp 2: $m > 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$4m$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$f(4m)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-24; -2)$ nên hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24; -2)$.

Trường hợp 3: $m < 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$4m$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(4m)$	$f(0)$	$+\infty$	

Để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24; -2)$ thì

$$-24 < 4m < -2 \Leftrightarrow -6 < m < -\frac{1}{2}.$$

So với điều kiện $m < 0$ ta được $-6 < m < -\frac{1}{2}$.

Suy ra $a = -6; b = -\frac{1}{2}$ nên $T = 2024b - 2025a = 2024 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2025 \cdot (-6) = 11138$.

Câu 26: Cho hàm số: $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-3; 2)$, $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -5$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3	-1	1	2			
y'		+	0	-	0	+	
y			0			3	
	-5			-2			

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-3; 2)$ bằng 0 .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; 2)$ bằng -2 .

c) Có 1 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để bất phương trình $f(x) > m$ luôn đúng với mọi $x \in (-3; 2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 + 1)$ trên $(-1; 1)$ bằng -2 .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

b) Đúng

c) Sai

Bất phương trình $f(x) > m$ luôn đúng với mọi $x \in (-3; 2) \Leftrightarrow m \leq -5$.

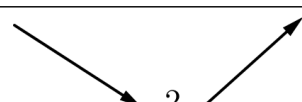
$$m \in \mathbb{Z}, m \in [-5; 5] \Rightarrow m \in \{-5\}.$$

d) Đúng

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$$

$$\text{Trên } (-1;1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (bội lẻ)} \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
y'	-	0	+
y			

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(0) = f(1) = -2$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C)

a) Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ bằng 2

c) Với $m \in [-1; +\infty)$ thì trên $[-1; +\infty)$ phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm trái dấu.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f^2(x) - 4f(x)$ trên $[-2; 1]$ bằng -4 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng

b) Đúng

x	-1	1	2	
y'	0	-	0	+
y	2	-2	2	

$$\Rightarrow \max_{[-1;2]} y = 2$$

c) Sai

Trên $[-1; +\infty)$ phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -2 < m \leq 2$

d) Sai

Ta có $y' = 2f'(x)[f(x) - 2]$.

$$\text{Trên } [-2; 2] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -1 \\ x = a \quad (a \in (1; +\infty)) \end{cases} \Rightarrow L$$

Ta có

$$y(-1) = f^2(-1) - 4f(-1) = -4; y(1) = f^2(1) - 4f(1) = 12; y(-2) = f^2(-2) - 4f(-2) = 12$$

$$\Rightarrow \max_{[-2; 1]} y = 12.$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = (m^2 - 6m)x^4 + (2m - 1)x^2 + 2m^3 - 1$ với m là tham số

a) Khi $m = 6$ thì $\min_{\square} f(x) = 431$.

b) Khi $m = 0$ thì $\max_{\square} f(x) = 1$.

c) Khi $m < 0$ hoặc $m > 6$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất.

d) Khi $m \in (1; 3)$ thì hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Khi $m = 6$ thì $\min_{\square} f(x) = 431$.

Khi $m = 6$, ta có $f(x) = 11x^2 + 431 \geq 431, \forall x \in \square$; dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Do đó $\min_{\square} f(x) = 431$.

b) Khi $m = 0$ thì $\max_{\square} f(x) = 1$.

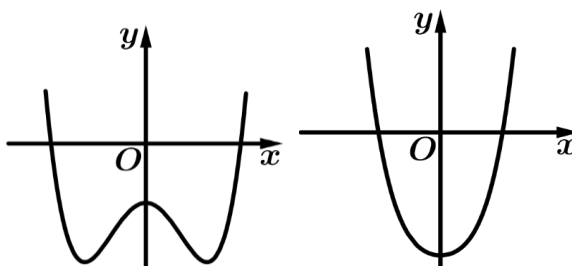
Khi $m = 0$, ta có $f(x) = -x^2 - 1 \leq -1, \forall x \in \square$; dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Do đó $\max_{\square} f(x) = -1$.

c) Khi $m < 0$ hoặc $m > 6$ hàm số có giá trị nhỏ nhất.

Khi $m < 0$ hoặc $m > 6$ thì $m^2 - 6m > 0$

Ta có $f(x)$ là hàm bậc 4 trùng phương có hệ số $a > 0$ nên $f(x)$ có đồ thị 1 trong 2 dạng



Từ đồ thị ta thấy, hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất.

d) Khi $m \in (1; 3)$ thì hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Khi $m \in (1; 3)$ thì $m^2 - 6m = m(m - 6) < 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, suy ra hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+m+6}{x-m}$ với m là tham số

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[2;3]} y + \min_{[2;3]} y = 14$.

b) Khi $m = 0$ thì $\min_{[1;3]} y = 2$.

c) Khi $m < -3$ và $\max_{[1;3]} y > 0$ thì $-9 < m < -3$.

d) Khi $m > -3$ và $\max_{[1;3]} y > 0$ thì $-7 < m < 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Khi $m = 1$ thì $\max_{[2;3]} y + \min_{[2;3]} y = 14$.

Khi $m = 1$ thì $y = \frac{x+7}{x-1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $[2;3] \subset D$ nên

$$\max_{[2;3]} y + \min_{[2;3]} y = y(2) + y(3) = 9 + 5 = 14.$$

b) Khi $m = 0$ thì $\min_{[1;3]} y = 2$.

Khi $m = 0$ thì $y = \frac{x+6}{x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $[1;3] \subset D$.

Ta có $y' = -\frac{6}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$. Khi đó $\min_{[1;3]} y = y(3) = 3$.

c) Khi $m < -3$ và $\max_{[1;3]} y > 0$ thì $-9 < m < -3$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Khi $m < -3$ thì $-2m-6 > 0$.

$$\text{Khi đó } \max_{[1;3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;3] \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ \frac{m+9}{3-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ -9 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < m < 1.$$

Đổi chiều với $m < -3$, ta được $-9 < m < -3$.

d) Khi $m > -3$ và $\max_{[1;3]} y > 0$ thì $-7 < m < 1$.

Ta có: $y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

Khi $m > -3$ thì $-2m-6 < 0$.

$$\text{Khi đó } \max_{[1;3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;3] \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ \frac{m+7}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ -7 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Đổi chiều với $m > -3$, ta được $-3 < m < 1$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ (m là tham số).

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ đạt tại $x = 2$.

b) Khi $m = 3$ thì $\max_{[1;2]} f(x) = -5$.

c) Khi $m = 3$ thì $\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -2$.

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là 3.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Xét hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$, ta có $y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}$

Khi $m = 3$ ta có $y' = \frac{-12}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [1;2]$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ đạt tại $x = 2$.

b) Khi $m = 3$ thì $\max_{[1;2]} f(x) = -5$.

Khi $m = 3$ ta có $y = \frac{x+9}{x-3}, y' = \frac{-12}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [1;2]$ nên $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -5$.

c) Khi $m = 3$ thì $\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -2$.

Khi $m \notin [1; 2]$ ta có $y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}$ không đổi dấu trên $[1; 2]$

$$\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = f(1) + f(2) = \frac{m+7}{1-m} + \frac{m+8}{2-m} = \frac{-2m^2-12m+22}{(1-m)(2-m)}$$

$$\text{Do đó } \max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2m^2-12m+22}{(1-m)(2-m)} = -2, m \notin \{1; 2\}$$

$$\Leftrightarrow -18m + 26 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{9}$$

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng m^2 .

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1; 3]$ thì $m \notin [1; 3]$.

$$y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Trường hợp 1: $-2m-6 > 0 \Leftrightarrow m < -3$.

$$\text{Khi đó } \max_{x \in [1; 3]} y = y(3) = \frac{m+9}{3-m}.$$

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là số dương thì $\frac{m+9}{3-m} > 0 \Leftrightarrow m+9 > 0 \Leftrightarrow m > -9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8, -7, -6, -5, -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6 < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

$$\text{Khi đó } \max_{x \in [1; 3]} y = y(1) = \frac{m+7}{1-m}.$$

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là số dương thì $\frac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2, -1, 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Khi đó $y = 1$. Nên $\max_{x \in [1; 3]} y = 1$.

Vậy $m = -3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 3]$.

a) Khi $m = -3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{3}{2}$.

b) Khi $m = -2$ thì $\max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ khi $m > -2$.

d) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) = 2$ là 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Khi $m = -3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{3}{2}$.

Thay $m = -3$ vào $y = \frac{2x+m}{x-1}$, ta có: $y = \frac{2x-3}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$

Vậy $\max_{[2;3]} f(x) = \frac{3}{2}$ tại $x = 3$.

b) Khi $m = -2$ thì $\max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$.

Thay $m = -2$ vào $y = \frac{2x+m}{x-1}$, ta có: $y = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$.

Vậy $\max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ khi $m > -2$.

$$y = \frac{2x+m}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2-m}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2-m > 0 \Leftrightarrow m < -2.$$

d) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) = 2$ là 4.

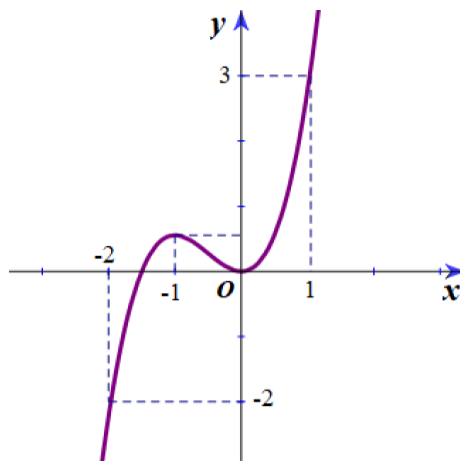
Khi $m = -2$ thì $\max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2 \Rightarrow m = -2$ không thỏa.

Khi $m \neq -2$ thì

$$\max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \left| 4 + m - \frac{6+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{m+2}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow |m+2| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) = 2$ là $2 + (-6) = -4$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và có đồ thị như hình dưới.



- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là 3.
- b) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 0.
- c) Tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in [-2; 1]$ là $m \leq -2$.
- d) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là 3.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta có: $\max_{[-2; 1]} f(x) = 3$ tại $x = 1$.

- b) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 0.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta có: $\max_{[-2; 1]} f(x) = 3$ tại $x = 1$ và $\min_{[-2; 1]} f(x) = -2$ tại $x = -2$.

Vậy tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là:
 $3 + (-2) = 1$.

- c) Tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in [-2; 1]$ là $m \leq -2$.

$f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in [-2; 1]$ khi và chỉ khi $\min_{[-2; 1]} f(x) \geq m \Leftrightarrow -2 \geq m \Leftrightarrow m \leq -2$.

- d) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng 4.

Đặt $t = x+1$. Vì $x \in [-1; 0] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1; 0]$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0; 1]$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta có: $\max_{[0;1]} f(t) = 3$ tại $x = 1$ và $\min_{[0;1]} f(t) = 0$ tại $x = 0$.

Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng $3 + 0 = 3$.